Clase 4: Diferenciación

C.J Vanegas

27 de abril de 2008

1. Derivadas Parciales

Recordemos que la definición de derivada parcial: sea $fA \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida sobre un intervalo abierto A. f es derivable en $x_0 \in A$, si existe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. En tal caso, dicho límite se denota por $f'(x_0)$ y se llama la derivada de f en x_0.

Si hacemos $h = x - x_0$, entonces podemos re-escribir el límite en la definición de la derivada como: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Definición 1. *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sea $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donde el 1 se encuentra en la i-ésima posición, y sea $x = x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Entonces, $x + he_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_i, en el punto $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, como:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{x},$$

si este existe.

- Observe que esto no es más que la derivada de f con respecto a la variable x_i dejando las otras variables fijas.
- Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ y entonces podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente. Por ejemplo, $\frac{\partial f_3}{\partial x_5}$ es la derivada parcial de la tercera componente con respecto a la quinta variable.
- En la práctica, para evaluar $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, aplique las reglas de derivación ordinarias considerando las demás variables constantes.

Ejemplo 1. *1.* $f(x,y) = e^{xy}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{xy}$

2. $z = f(x,y) = \log\sqrt{1+xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2)} = ?$

$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\ \frac{1}{\sqrt{1+xy}}\frac{1}{2}(1+xy)^{-1/2}y\Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

- Otras notaciones para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_i} = z_{x_i} = f_{x_1}.$$

- Si $f'(x_0)$ existe, su valor nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $g = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

- Bajo la óptica de del cálculo las funciones importantes a estudiar son las funciones diferenciables. Así podemos obtener información de la función a partir de su derivada (la información que se obtiene de f a partir de $f'(x_0)$ es local, es decir, alrededor del punto x_0). Por ejemplo, el simple hecho de la existencia de $f'(x_0)$ nos habla del comportamiento suave de la gráfica de la función en los alrededores del punto $(x_0, f(x_0))$; el signo de $f'(x_0)$ nos habla del crecimiento y/o decrecimiento de la función alrededor del punto, etc.

- Queremos disponer de un concepto de "diferenciabilidad" para funciones de varias variables semejante al que tenemos para funciones de una variable.

  Hagamos un acercamiento a este concepto buscado.

- Consideremos primero una función de dos variables: $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde U es abierto. Sea $P = (x_0, y_0) \in U$. Definimos la derivada parcial de f con respecto de x en el punto p, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ (ó $f_x(p)$ ó $f_1(p)$ ó $D_1 f(p)$), como el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

  cuando est límite existe.

  Similarmente, la derivada parcial de f con respecto a y en p, denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ (ó $f_y(p)$ ó $f_2(p)$ ó $D_2 f(p)$) es el límite (si existe)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

2. Interpretación geométrica

Considere la función $\varphi(x) = f(x, y_0)$, es decir, φ se obtiene de la función $f(x, y)$ al fijar la segunda variable en $y = y_0$. Ahora veamos $\varphi'(x_0)$.

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(p).\end{aligned}$$

Similarmente, si hacemos $\psi(y) = f(x_0, y)$, entonces

$$\begin{aligned}\psi'(y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi(y_0+h) - \psi(y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(p).\end{aligned}$$

Así que φ (ψ) representa la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$ ($x = x_0$, resp.). Entonces, $\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$ ($\psi'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$) es la pendiente de la recta tangente a φ (ψ resp.) en el punto $x = x_0$ ($y = y_0$, resp.). Por lo tanto, podemos decir que las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$ en un punto $p = (x_0, y_0)$ nos dicen del comportamiento geométrico de la superficie que tal función representa en las direcciones de los ejes x e y. Ésta es pues una información "parcial".

- las derivadas parciales son conceptos "puntuales", es decir, se habla de la derivada parcial de una función en un punto dado (de su dominio).
- A nivel práctico para evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ se aplican las reglas de derivación ordinarias considerando la otra variable constante.

Ejemplo 2.

1. *$f(x, y) = x^2y^3$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(2, 3)$ por definición*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h, 3) - f(2, 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 27 - 4\cdot 27}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h^2+4h)27 - 4\cdot 27}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+4h)27}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4)27 = 4\times 27 = 108.\end{aligned}$$

Directamente, $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(2,3)} = 2xy^3\big|_{(2,3)} = 2\times 2\times 27 = 108.$

2. *$f(x, y) = x^2 + y^2$ ¿Qué significa $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(1,0)}$? Esto significa que la curva $f(1, y) = 1 + y^2$ que está en el plano $x = 1$ tiene una recta tangente en $y = 0$ con pendiente $m = 0$.*

3. Caso General

Interpretaciones físicas: las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *miden las variaciones parciales de "cantidades físicas" con respecto a la variable* x_i *que también puede tener un sentido físico. Por ejemplo, si* V *representa el volumen de un sólido y* T *la temperatura del mismo, entonces* $\frac{\partial V}{\partial T}(x)$ *representa la variación del volumen* V *con respecto a la temperatura* T.

- *Ahora regresamos a nuestra intención de establecer una noción de diferenciabilidad equivalente a aquélla para funciones de una variable (en cuyo caso la diferenciabilidad es equivalente a la existencia de la derivada). Nos preguntamos si la sola existencia de las derivadas parciales de una función* $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *en un punto* $x_0 \in U$ *nos bastaría para dar el concepto requerido. Esto no es suficiente porque debería respetar la propiedad: "diferenciabilidad implica continuidad". Por ejemplo, si* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{si} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{si} & (x,y) = (0,0). \end{Bmatrix}$$

  entonces

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & = & \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0, \\ & = & \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) & = & \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0. \end{array}$$

  Es decir, las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *existen y, sin embargo, la función* f *es discontinua en* $(0,0)$ *(el límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *no existe).*

- *El ejemplo 4 de la página 115 muestra como falla la regla de la cadena.*

Volvamos a nuestra definición de diferenciabilidad en el calculo de una variable:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}{x-x_0} = 0.$$

Observe que $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = y(x)$ es la recta tangente a f que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $m = f'(x_0)$. Así que en la definición de diferenciabilidad para funciones de una variable hay una nocion de "buena aproximacion": la recta tangente l esta cerca de f

en el sentido aplicado.
Adaptemos la nocion de "buena aproximacion"para definir diferenciabilidad en dos variables. Hablamos entonces de plano tangente.
Si f es suficientemente suave, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ veamos que ecuación tiene su plano tangente en (x_0, y_0).
En $\mathbb{R}^3$ un plano no vertical tiene ecuación: $z = ax + by + c$. Si este es el plano tangente a la gráfica de f, las pendientes a lo largo de los ejes x e y deben ser iguales a $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, asi $a = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0}$.
Por otro lado en (x_0, y_0) se tiene $z = f(x_0, y_0) = f(\overline{x_0}) = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow \boxed{c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0.}$
Así.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x_0})y + f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})x_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})y_0 \Rightarrow$$
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x_0})(y - y_0) \quad (1)$$

Definición 2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0), si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en (x_0, y_0) y si* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x_0})(y - y_0)|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$

Podemos escribir:

$$\underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x_0})(y - y_0)}_{\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x_0}) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x_0})\right)}_{Df(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}} \quad (2)$$

$$= f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Decimos que esta expresión es la mejor aproximación lineal a f cerca de (x_0, y_0)

Definición 3. *Diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$*
Sean U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Decimos que f es diferenciable en $\overline{x_0} \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\overline{x_0}$ y si $\displaystyle\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} \frac{\|f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) - T(\overline{x} - \overline{x_0})\|}{\|\overline{x} - \overline{x_0}\|} = 0,$

donde $T = Df(\overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{x_0}) \end{pmatrix}_{m\times n}$

y $T(\overline{x} - \overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x_n - x_0^n \end{pmatrix}$

Llamaremos a $\underline{T \text{ derivada de } f \text{ en } \overline{x_0}}$

Observación 1. *Si* $m = 1$ $T = Df(\overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x_0}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x_0}) \end{pmatrix}$

☞ EJERCICIOS

✍ Calcule $Df(\overline{x})$ para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (xye^{xy},\ x\sin y,\ 5xy^2)$ Solución:

$$Df(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ \sin y & x\cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{pmatrix}$$

✍ Calcular $\bigtriangledown f$ para $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

Solución:

$$\bigtriangledown f = (2x,\ 2y,\ 2z) \tag{3}$$

Observación 2. *En el caso* $m = 1$, *si escribimos* $Df(\overline{x}_0)$ *como* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_0) \quad ,\dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}_0)\right)$, *llamamos a este vector, gradiente de* f *y lo denotamos por* $grad f$ *o* $\bigtriangledown f(\overline{x}_0)$ *por lo que* $\boxed{\bigtriangledown f(\overline{x}_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad ,\dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(\overline{x}_0)}$

Teorema 1. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *si* f *es diferenciable en* $\overline{x}_0$ *entonces* f *es continua en* $\overline{x}_0$

Teorema 2. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *si existen todas las derivadas parciales de* f *y son continuas en una vecindad de* $x \in U$, *entonces* f *es diferenciable en* x. ➨ f *diferenciable* $\nRightarrow$ *las derivadas parciales de* f *sean continuas.*

✎

Ejemplo 3.

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

f es diferenciable en $(0,0)$, *en efecto:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}=0.$$

Similarmente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. *Luego* $T=Df(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}_{1\times 2}$

Verifiquemos que: $\displaystyle\lim_{\overline{h}\to 0}\frac{|f(\overline{h}+\overline{0})-f(\overline{0})-T(\overline{h})|}{|\overline{h}|}=0$ *donde* $\overline{0}=(0,0)$ *y* $\overline{h}=(h_1,h_2)$ *Calculemos:*

$$\frac{f(\overline{h}+\overline{0})-f(\overline{0})-T(\overline{h})}{|\overline{h}|}=\frac{\frac{|\overline{h}|^2}{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-0}{|\overline{h}|}=|\overline{h}|\sin\frac{1}{|\overline{h}|}\longrightarrow 0,\quad Cuando\quad \overline{h}\to 0.$$

Las derivadas parciales de f: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *no son continuas en* $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2y\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calculemos ahora el limite siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{r\to 0}2r\cos\theta\sin\frac{1}{r}-\cos\theta\cos\frac{1}{r}=-\underbrace{\lim_{r\to 0}\cos\theta\cos\frac{1}{r}}_{\nexists}\neq 0 \qquad (4)$$

Similarmente para para $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$

☞ $\boxed{\text{EJEMPLOS}}$

✍ $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = \cos(x+y^2+z^2)$ Las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}) = -\sin(x+y^2+z^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}) = -2y\sin(x+y^2+z^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x}) = -2z\sin(x+y^2+z^2)$$

Por lo que f es diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$.

✍ $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (\underbrace{x+y}_{f1}, \underbrace{x-y}_{f2}, \underbrace{xy}_{f3})$

1. Veamos si f es diferenciable:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}) = (1,1,y)$$
Como cada componente es continua en todo $\mathbb{R}^2$ entonces, $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})$ es continua. De igual manera vemos que:
$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}) = (1,-1,x)$ es continua. Por lo que f es diferenciable.
2. Calculemos $Df(\overline{x})$.
$$Df(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial f_1}x & \frac{\partial}{\partial f_1}y \\ \frac{\partial}{\partial f_2}x & \frac{\partial}{\partial f_2}y \\ \frac{\partial}{\partial f_3}x & \frac{\partial}{\partial f_3}y \end{pmatrix}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}_{3\times 2} \tag{5}$$

✍ Hallar las ecuaciones del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1,1,3)$.

Calculemos las derivadas parciales:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\Big|_{(1,1,3)} = 2$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2\Big|_{(1,1,3)} = 6$
Sabemos por hipótesis que $f(1,1) = 3$ por lo que:
$$f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-1) = 3 + 2(x-1) + 6(y-1) = 2x + 6y - 5$$

Observación 3. *Reescribimos la ecuación del plano tangente para $z = f(x,y)$:*

$$\boxed{z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)(y-y_0) \Rightarrow}$$
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.}$$

Si

$$\underbrace{z = f(x,y)}_{Superficie} \Longleftrightarrow \underbrace{f(x,y) - z}_{F(x,y,z)} = 0$$

Entonces: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$*;* $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$*;* $\dfrac{\partial F}{\partial z} = -1.$
Luego la ecuación del plano tangente viene dada por $F(x,y,z) = 0$.
Por otro lado $\boxed{\bigtriangledown F(\overline{x}_0) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0}$ *Si* $\bigtriangledown F(\overline{x}_0) \neq 0$*. coincide con la ecuación Si* $F(x,y,z) = k$.

Ejemplo 4. ✍ *Hallar las ecuaciones del plano tangente a* $z = x^2 + 2y^3$ *en* $(1,1,3)$*. (Compare con el método resuelto con anterioridad) Vemos que:*

$$z = x^2 + 2y^3 \Longleftrightarrow \underbrace{z = x^2 + 2y^3 - z = 0}_{F(x,y,z)}.$$

Calculemos el vector gradiente:

$$\bigtriangledown F(1,1,3) = (2x, 6y^2, -1)\Big|_{(1,1,3)} = (2,6,-1)$$

Ahora calculemos el producto escalar siguiente, para obtener la ecuación del plano:

$$\bigtriangledown F(1,1,3) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2,6,-1) \circ (x - 1, y - 1, z - 3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x + 6y - z - 2 - 6 + 3 = 0$$

$$2x + 6y - z - 5 = 0$$

✍ *Hallar la ecuación del plano tangente a* $F(x,y,z)z^2 e^x \cos y = 0$ *en* $(1,0,1)$ *Calculemos el vector gradiente:*

$$\bigtriangledown F(1,0,1) = (z^2 e^x \cos y, -z^2 e^x \sin y, 2ze^x \cos y)\Big|_{(1,0,1)} = (e,0,2e)$$

Ahora calculemos la ecuación del plano dado por el producto escalar siguiente:

$$(e,0,2e) \circ (x - 1, y - 0, z - 1) = 0 \Rightarrow ex + 2ez - e - 2e = 0 \Rightarrow x + 2z - 3 = 0$$